

Licence Psychologie

AV = 2016-2017

* Correction EC N°2 *

Exercice:

1) On définit :

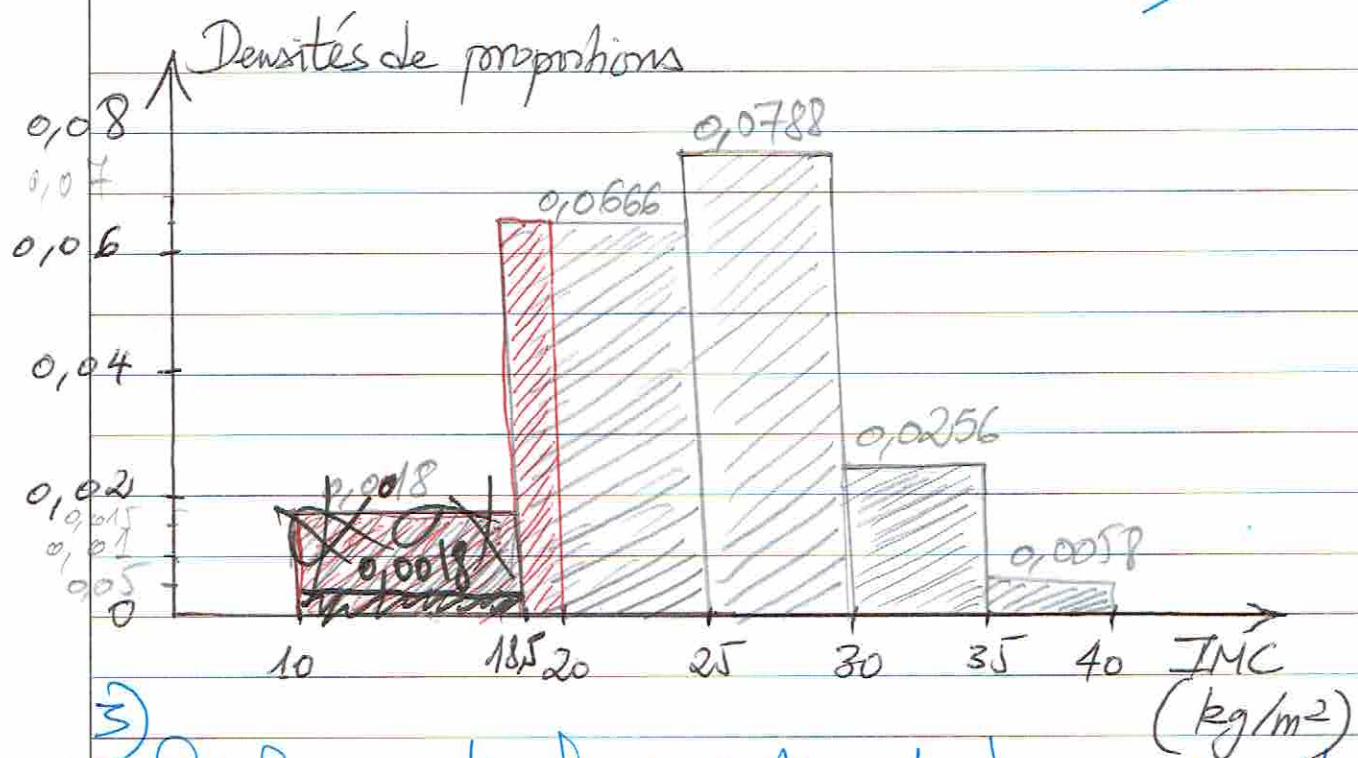
Population = { Hommes québécois en 2005 }

variable étudiée X : Indice de masse corporelle (IMC).type de X : variable quantitative continue.

2) La représentation graphique de la distribution des proportions de la variable "IMC" est l'histogramme. Pour le tracer, il faut au préalable calculer les densités de proportions pour les différentes classes du découpage donné.

On donne les densités de proportions dans le tableau suivant:

Classes de X "IMC" en kg/m ²	$]10; 18,5]$	$]18,5; 25]$	$]25; 30]$	$]30; 35]$	$]35; 40]$
Amplitude de ces classes	$18,5 - 10$ $= 8,5$	6,5	5	5	5
Densités de proportions	$\frac{0,016}{8,5}$ $= 0,0018$	$\frac{0,433}{6,5}$ $= 0,0666$	$\frac{0,394}{5}$ $= 0,0788$	$\frac{0,128}{5}$ $= 0,0256$	$\frac{0,029}{5}$ $= 0,0058$



3) Graphiquement, la proportion des hommes ayant un IMC moins de 20 kg/m² est égale à la proportion de $[10, 20]$ c'est à dire.

$$\text{proportion}([10, 20]) = \text{proportion}([10; 18,5]) + \text{proportion}([18,5; 20]).$$

Or $\text{proportion}([10; 18,5]) = 0,016$.
(d'après le tableau de la distribution des proportions ~~donnée~~ donnée).

$$\begin{aligned} \text{proportion}([18,5; 20]) &= \text{densité}([18,5; 25]) \\ &\quad \times \text{base}([18,5; 20]) \\ &= 0,0666 \times (20 - 18,5) \\ &= 0,0666 \times 1,5 = \\ &= 0,0999 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi proportion } (10; 20] = 0,099 + 0,016 \\ = 0,115$$

$\Rightarrow 11,5\%$ des hommes ont un IMC moins de $20 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$

La représentation graphique qui correspond aux aires des deux rectangles colorés en rouge dans l'histogramme.

Cette proportion est une valeur approchée car on ne sait pas l'effectif exacte dans la sous classe $(18,5; 20]$.

4) Pour calculer la moyenne et l'écart type de la variable IMC dans la population il faut d'abord déterminer les centres de classes du découpage donné.

classes de l'IMC	$[10; 18,5]$	$[18,5; 25]$	$[25; 30]$	$[30; 35]$	$[35; 40]$
centre de classe	$\frac{10 + 18,5}{2}$ $= 14,25$	$\frac{18,5 + 25}{2}$ $= 21,75$	$\frac{25 + 30}{2}$ $= 27,5$	$\frac{30 + 35}{2}$ $= 32,5$	$\frac{35 + 40}{2}$ $= 37,5$

Ainsi, l'IMC moyen est $\mu = \sum_i (\text{proportion} \times \text{centre})$

$$\mu = (0,016 \times 14,25) + (0,433 \times 21,75) + (0,394 \times 27,5) \\ + (0,128 \times 32,5) + (0,029 \times 37,5),$$

$$\text{alors } \mu = 25,72 \text{ kg/m}^2.$$

$\Rightarrow$ L'IMC moyen dans la population des hommes québécois est de $25,72 \text{ kg/m}^2$.

Pour calculer l'écart-type σ on commence par calculer la variance σ^2

$$\text{Variance} = \sigma^2 = \sum (\text{proportion} \times \text{centre}^2) - \mu^2$$

Donc $\sigma^2 = \left[(0,016 \times (14,25)^2) + (0,433 \times (21,75)^2) + (0,394 \times (27,5)^2) + (0,128 \times (32,5)^2) + (0,029 \times (37,5)^2) \right] - (25,72)^2$

Alors $\sigma^2 = 20,51 \text{ kg}^2/\text{m}^4$.

$\Rightarrow$ L'écart type est $\sigma = \sqrt{20,51} = 4,52 \text{ kg}/\text{m}^2$.

$\Rightarrow$ L'écart type de la variable IMC dans la population des hommes québécois est de $4,31 \text{ kg}/\text{m}^2$.

5) La distribution des proportions cumulée est donnée par le tableau suivant.

Bornes de classes

Proportions
Cumulées
 $F(\cdot)$

10	18,5	25	30	35	40
$F(10)$ $= 0$	$F(18,5)$ $= 0,016$	$F(25)$ $= 0,449$	$F(30)$ $= 0,843$	$F(35)$ $= 0,971$	$F(40)$ $= 1$

$$F(10) = 0$$

$$F(18,5) = 0,016$$

$$F(25) = F(18,5) + \text{proportion}([18,5; 25])$$

$$= 0,016 + 0,433 = 0,449$$

$$F(30) = F(25) + \text{proportion}([25; 30])$$

$$= 0,449 + 0,394 =$$

6) La médiane de la variable IMC est la deuxième quartile Q_2 qui correspond au quantile d'ordre 0,5 noté $q_{0,5}$, c'est à dire

$$P(X \leq q_{0,5}) = 0,5 \quad (50\%)$$

D'après le tableau de la distribution des proportions cumulée, on a :

$$F(25) = 0,449 < 0,5$$

$$F(30) = 0,843 > 0,5$$

Ainsi on approche la médiane par

$$\begin{aligned} \text{Médiane} &= 25 + (30 - 25) \times \frac{0,5 - 0,449}{0,843 - 0,449} \\ &= 25,64 \text{ kg/m}^2. \end{aligned}$$

⇒ 50% de hommes ont un IMC moins de 25,64 kg/m²
50% ————— supérieure à —————

• Le troisième quartile Q_3 de la variable "IMC" est le quantile d'ordre 0,75 noté $q_{0,75}$.

on a $F(25) = 0,449 < 0,75$

$$F(30) = 0,843 > 0,75$$

Ainsi
$$\begin{aligned} Q_3 &= 25 + (30 - 25) \times \frac{0,75 - 0,449}{0,843 - 0,449} \\ &= 28,81 \text{ kg/m}^2. \end{aligned}$$

⇒ 75% de hommes québécois en 2005 ont un IMC moins de 28,81 kg/m².

F) L'intervalle de variation au niveau 90%
c'est à dire au risque $\alpha = 10\%$ ($\alpha = 0,1$)
est définie par:

$$I_{90\%} = \left[q_{\frac{\alpha}{2}} ; q_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

$$\text{on a } \frac{\alpha}{2} = \frac{0,1}{2} = 0,05$$

$$\text{et } 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,1}{2} = 1 - 0,05 = 0,95$$

$$\text{Donc } I_{90\%} = [q_{0,05} ; q_{0,95}]$$

Déterminons les quantiles $q_{0,05}$ et $q_{0,95}$ de la variable IMC

$$\text{on a } \begin{cases} F(10) = 0 < 0,05 \\ F(18,5) = 0,016 > 0,05 \end{cases} \quad \begin{cases} F(18,5) = 0,016 < 0,05 \\ F(25) = 0,449 > 0,05 \end{cases}$$

$$\Rightarrow q_{0,05} = 10 + (18,5 - 10) \times \frac{0,05 - 0}{0,016 - 0}$$

$$\begin{aligned} q_{0,05} &= 18,5 + (25 - 18,5) \times \frac{0,05 - 0,016}{0,449 - 0,016} \\ &= 19,01 \text{ kg/m}^2 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{cases} F(30) = 0,843 < 0,95 \\ F(35) = 0,971 > 0,95 \end{cases}$$

$$\Rightarrow q_{0,95} = 30 + (35 - 30) \times \frac{0,95 - 0,843}{0,971 - 0,843}$$

$$= 34,17 \text{ kg/m}^2$$

Ainsi

$$I_{90\%} = [19,01 \text{ kg/m}^2 ; 34,17 \text{ kg/m}^2]$$

$\Rightarrow$ 90% des hommes québécois en 2005 ont un IMC compris entre $19,01 \text{ kg/m}^2$ et $34,17 \text{ kg/m}^2$.