Licence Psychologie   AU : 2016-2017

* Correction CC N°2 *

Exercice :

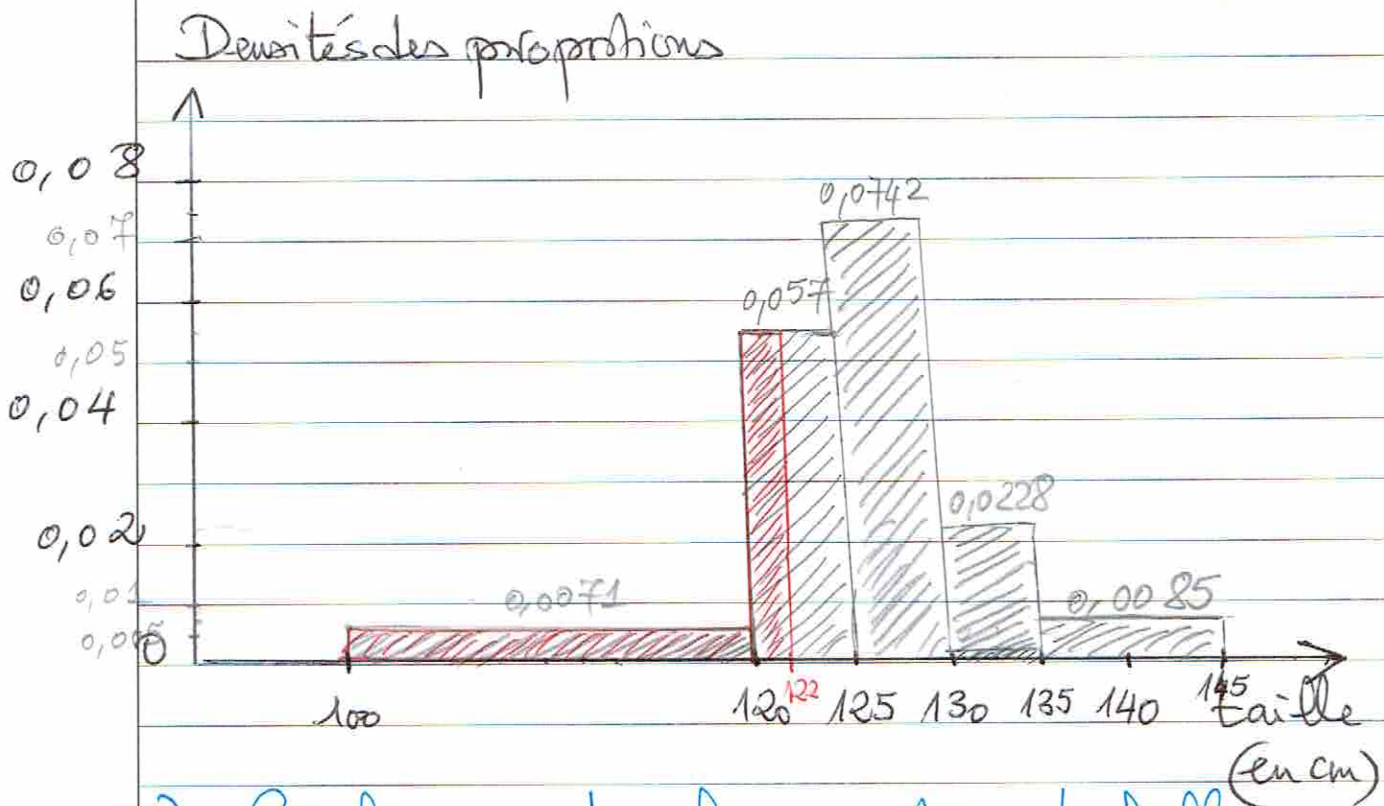
1) On définit :

- Population = { Filles agées de 8ans d'~~une~~ une école primaire }
- taille de la population N = 35 filles.
- variable étudiée X : "taille"
- type de X : variable quantitative continue.

2) La représentation graphique de la distribution des proportions de la variable "taille" est l'histogramme. Pour le tracer, il faut au préalable calculer les densités de proportions pour les différentes classes du découpage donné.

On donne les densités de proportions dans le tableau suivant :

Classes de X "taille"	]100 ; 120]	]120 ; 125]	]125 ; 130]	]130 ; 135]	]135 ; 145]
Amplitude des classes	20	5	5	5	10
Densités de proportions	$\frac{0,142}{20}$ = 0,0071	$\frac{0,285}{5}$ = 0,057	$\frac{0,371}{5}$ = 0,0742	$\frac{0,114}{5}$ = 0,0228	$\frac{0,085}{10}$ 0,0085



3) Graphiquement, la proportion de filles mesurant moins de 122 cm est égale à la proportion de]100; 122 cm] c'est à dire

proportion(]100; 122]) = proportion(]100; 120])

+ proportion(]120; 122]).

Or proportion(]100; 120]) = 0,142 (~~du tableau~~)
(d'après le tableau de la distribution des proportion donné).

et proportion(]120, 122]) = densité(]120, 125])

× base(]120; 122])

= 0,057 × (122 − 120)

= 0,057 × 2

= 0,114

Ainsi proposition (]100, 122]) = 0,142 + 0,114
= 0,256.

$\Rightarrow$ 25,6 % des filles agées de 8 ans mesurent moins de 122 cm.

. La representation graphique correspond aux aires de deux rectangles colorés en rouge dans l'histogramme.

. Cette proposition est une valeur approchée car on ne sait pas l'effectif exacte dans la sous classe]120, 122].

4) Pour calculer la taille moyenne μ et l'écart type σ dans cette population, il nous faut d'abord déterminer les centres de classes ~~de~~ du découpage donné :

classes de taille	]100; 120]	]120; 125]	]125; 130]	]130; 135]	]135; 145]
Centre de classe	$\frac{100+120}{2}$ $= 110$	$\frac{120+125}{2}$ $= 122,5$	$\frac{125+130}{2}$ $= 127,5$	$\frac{130+135}{2}$ $= 132,5$	$\frac{135+145}{2}$ $= 140$ $= 140$

La taille moyenne μ est $\mu = \sum_i$ proportion × centre

$\mu = (0,142 \times 110) + (0,285 \times 122,5) + (0,371 \times 127,5)$
$+ (0,114 \times 132,5) + (0,085 \times 140)$

alors ~~$\mu = 124,62$ cm~~. $\mu = 124,84$ cm

$\Rightarrow$ La taille moyenne de fille âgés de 8 ans dans l'école primaire est de ~~124,62~~ cm.
de 124,84 cm

Intercalaire N° 4

Pour calculer l'écart-type σ on commence par calculer la variance σ^2

~~Variance = σ^2 = [~~

Variance $= \sigma^2 = \sum (\text{proportion} \times \text{centre}^2) - \mu^2$

$$\sigma^2 = \Big[(0{,}142 \times 110^2) + (0{,}285 \times (112{,}5)^2) + (0{,}371 \times (127{,}5)^2) + (0{,}114 \times (132{,}5)^2) + (0{,}085 \times (140)^2)\Big] - \cancel{(124{,}84)^2} - (124{,}84)^2$$

Ainsi $\sigma^2 = \cancel{130{,}84\ cm^2}$ $\cancel{104{,}34}$ $\cancel{cm}$ $108{,}43\ cm^2$

$\Rightarrow$ L'écart type ~~σ est σ = 11~~ $\sigma = \sqrt{\cancel{104{,}34}} = \cancel{11{,}6}$

Ainsi
$\sigma = \sqrt{108{,}43}$
$= 10{,}41$ cm

$\boxed{\sigma = \cancel{11{,}6\ cm}}$ $\cancel{\sigma = \sqrt{104{,}34} = 10{,}21\ cm}$

5) La distribution des proportions cumulées est donnée par le tableau suivant :

Bornes des classes	100	120	125	130	135	145
proportion cumulée F(·)	F(100) = 0	F(120) = 0,142	F(125) = 0,427	F(130) = 0,798	F(135) = 0,912	F(145) = 0,997 ≈ 1

$F(100) = 0$

$F(120) = 0{,}142$

$F(125) = F(120) + \mathbb{P}(]120, 125])$
$= F(120) + 0{,}285$
$= 0{,}142 + 0{,}285 = 0{,}427$

$F(130) = F(125) + \text{Proportion}(]125, 130])$
$= 0{,}427 + 0{,}371 = 0{,}798$

de la variable taille

6) • La médiane est le deuxième quartile Q_2 qui correspond au quantile d'ordre 0,5, noté $q_{0,5}$, c'est à dire

$$\mathbb{P}(X \leq q_{0,5}) = 0,5. \quad (50\%).$$

D'après le tableau des proportions cumulées on a.

$$\begin{cases} F(125) = 0,427 < 0,5 \\ F(130) = 0,798 > 0,5 \end{cases}$$

et

Ainsi on approche la médiane par

$$\text{Médiane} = Q_2 = 125 + (130 - 125) \times \frac{0,5 - F(125)}{F(130) - F(125)}$$

$$\text{Médiane} = 125 + 5 \times \frac{0,5 - 0,427}{0,798 - 0,427}$$

Médiane = 125,98 cm

$\Rightarrow$ 50 % de filles ont une taille moins de 125,98 cm

50 % ——— supérieure à 125,98 cm

• Le troisième quartile Q_3 de la variable taille est le quantile d'ordre 0,75 notée $q_{0,75}$

$$Q_3 = q_{0,75}$$

on a $F(125) = 0,427 < 0,75$

$F(130) = 0,798 > 0,75$

Ainsi

$$Q_3 = 125 + (130 - 125) \times \frac{0,75 - 0,427}{0,798 - 0,427}$$

~~$Q_3 = 125$~~ Alors $Q_3 = 129,35$ cm.

$\Rightarrow$ 75 % des filles âgées de 8 ans ont une taille moins de 129,35 cm.

7) L'intervalle de variation au niveau 90 % c'est à dire au risque $\alpha = 10\%$ ($\alpha = 0,1$) est défini par :

$$I_{90\%} = \left[q_{\frac{\alpha}{2}} \; ; \; q_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

on a $\frac{\alpha}{2} = \frac{0,1}{2} = 0,05$

$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95$

Donc $I_{90\%} = \left[q_{0,05} \; ; \; q_{0,95} \right]$.

Déterminons $q_{0,05}$ et $q_{0,95}$ de la variable taille :

on a $\begin{cases} F(100) = 0 < 0,05 \\ F(120) = 0,142 > 0,05 \end{cases}$

$\Rightarrow q_{0,05} = 100 + (120 - 100) \times \frac{0,05 - 0}{0,142 - 0}$

$= 107,04$ cm

& $\begin{cases} F(135) = 0,912 < 0,95 \\ F(145) = 1 > 0,95 \end{cases}$

$q_{0,95} = 135 + (145 - 135) \times \frac{0,95 - 0,912}{1 - 0,912}$

$=$ ~~187,215~~ cm. 139,31 cm

Ainsi

$$I_{90\%} = [107{,}04\,cm\,;\ 139{,}31\,cm].$$

$\Rightarrow$ 90 % des filles âgées de 8 ans ont une taille comprise entre 107,04 cm et ~~137,15 cm.~~ et 139,31 cm